

Technischer Bericht Nr. 71

Darstellung und Berechnung des Oberflächenwiderstandes
eines geschichteten Mediums mit einem Analogrechner

von

Dr.-Ing. E. HANLE

Berlin
1 9 6 4

H71

Technischer Bericht Nr. 71

Darstellung und Berechnung des Oberflächenwiderstandes eines geschichteten Mediums mit einem Analogrechner

Zusammenfassung

Der Feldwiderstand als Quotient von elektrischer und magnetischer Feldstärke gestattet eine sinnvolle Beschreibung jedes in einer Richtung inhomogenen Mediums. Insbesondere der an einer Grenzfläche wirksame Oberflächenwiderstand ist für viele Wellenausbreitungsuntersuchungen von Interesse.

Es wird gezeigt, wie sich der Oberflächenwiderstand eines in Normalenrichtung zur Oberfläche beliebig inhomogenen Halbraumes auf einem Analogrechner darstellen und berechnen läßt.

Einige wichtige Beispiele für zweigeschichtete Medien werden angegeben und eine Anwendung für Berechnungen von jahreszeitlich bedingten Feldstärkeschwankungen an der Erdoberfläche gezeigt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. E. Hanle

(Dr.-Ing. E. Hanle)

Der Abteilungsleiter

gez. Gundlach

(Prof. Dr.-Ing. F. W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

gez. Rotherth

(Prof. Dr.-Ing. G. R. Rotherth)



Inhaltsverzeichnis

Seite

1. Ebene Wellen in einem inhomogenen Halbraum	1
2. Darstellung des Feldwiderstandes auf einem Analogrechner .	3
3. Darstellung des Oberflächenwiderstandes	5
4. Schichtung	7
5. Direkte Darstellung der Frequenzabhängigkeit des Oberflächenwiderstandes	10
6. Anwendung für Berechnungen der jahreszeitlichen Feldstärkeschwankungen im Fernfeld von Mittelwellensendern	11
Literatur	13

1. Ebene Wellen in einem inhomogenen Halbraum

Für viele technische Probleme interessiert der Einfluss, den eine Grenzfläche auf die Wellenausbreitung in einem Halbraum (Luft) hat. Oft besteht der andere Halbraum hinter der Grenzfläche keineswegs aus einem homogenen Medium, in der Mehrzahl der Fälle wird er als geschichtet zu betrachten sein. Der Einfluss dieses zweiten Halbraumes auf die Wellenausbreitung im ersten charakterisiert in erster Linie sein Oberflächenwiderstand bzw. der daraus errechenbare Reflektionsfaktor an der Grenzfläche.

Im folgenden wird ein Halbraum betrachtet, der in Normalenrichtung zu seiner Oberfläche beliebig inhomogen sei. Er habe eine komplexe relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon'(z) - j\epsilon''(z)$ und eine relative Permeabilität $\mu = \mu'(z) - j\mu''(z)$. Über dem Halbraum ($z > 0$) befinde sich Luft.

Dann gilt ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu_0\mu \vec{H} = -j\beta_0 Z_0 \mu \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= j\omega\epsilon_0\epsilon \vec{E} = j\frac{\beta_0}{Z_0} \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

im Innern des Halbraumes für ebene Wellen, die beispielsweise vertikal elektrisch polarisiert unter dem Winkel θ an seiner Oberfläche einfallen, bei entsprechender Koordinatenwahl:

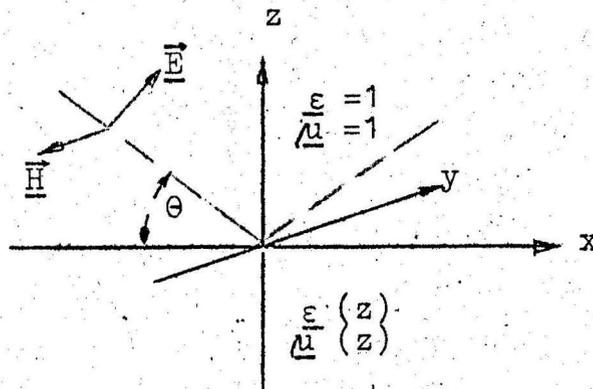


Bild 1. Ebene Welle über inhomogenem Halbraum

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = j\beta_0 Z_0 \underline{\mu} \underline{H}_{-y} \quad \underline{E}_y = 0$$

$$\frac{\partial \underline{H}_{-y}}{\partial z} = j \frac{\beta_0}{Z_0} \underline{\epsilon} \underline{E}_x \quad \underline{H}_x = 0$$

$$\frac{\partial \underline{H}_{-y}}{\partial x} = j \frac{\beta_0}{Z_0} \underline{\epsilon} \underline{E}_z \quad \underline{H}_z = 0$$

Die Grenzbedingung an der Oberfläche liefert zusätzlich :

$\frac{\partial}{\partial x} = -j\beta_0 \cos\theta$. Zusammengefasst ergibt sich daraus das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = j\beta_0 Z_0 \underline{\mu} \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\underline{\epsilon}} \right) \underline{H}_{-y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_{-y}}{\partial z} = j \frac{\beta_0}{Z_0} \underline{\epsilon} \underline{E}_x \quad (2)$$

bzw. die Wellengleichungen :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} = -\beta_0^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu} \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\underline{\epsilon}} \right) \underline{E}_x$$

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_{-y}}{\partial z^2} = -\beta_0^2 \underline{\epsilon} \underline{\mu} \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\underline{\epsilon}} \right) \underline{H}_{-y}$$

Für horizontal elektrisch polarisierte Wellen müßten bei gleichem Koordinatensystem die elektrischen Komponenten mit den entsprechenden magnetischen (\underline{H}_{-y} mit \underline{E}_y) und die Dielektrizitätskonstante $\underline{\epsilon}\epsilon_0$ mit der Permeabilität $\underline{\mu}\mu_0$ vertauscht werden. (Für Kugelwellen vergl. /1/ und speziell Wellenausbreitung an der Erdoberfläche /2/).

Das Gleichungssystem in \underline{E}_x und \underline{H}_{-y} bzw. die entsprechenden Wellengleichungen können nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil an einem Analogrechner leicht dargestellt werden, wenn man senkrechten Einfall ($\theta = 90^\circ$) oder eine grosse relative Dielektrizitätskonstante voraussetzt $|\underline{\epsilon}| \gg \cos^2\theta$.

2. Darstellung des Feldwiderstandes auf einem Analogrechner

Für viele praktische Probleme sind jedoch die Feldstärkekomponenten selbst nicht von allzu großem Interesse. Ihr Quotient $\underline{Z}_{-z}(z) = \frac{\underline{E}_x(z)}{\underline{H}_{-y}(z)}$, der Feldwiderstand ist dagegen eine vielseitig brauchbare Größe /3/. Er hat keinen Vektorcharakter, obwohl ihm durch die Feldstärkekomponenten ebenfalls eine Richtung zugeordnet ist.

Aus Gl.1 und 2 ergibt sich die Differentialgleichung dieses Feldwiderstandes zu:

$$\frac{\partial \underline{Z}}{\partial z} = j\beta_0 Z_0 \left[\underline{\mu} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\underline{\epsilon}} \right) - \underline{\epsilon} \left(\frac{\underline{Z}}{Z_0} \right)^2 \right]$$

Zur Darstellung dieser Riccatischen Differentialgleichung auf einem Analogrechner für beliebige Tiefenabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante $\underline{\epsilon}(z)$ und der Permeabilität $\underline{\mu}(z)$ muß die komplexe Gleichung in Real- und Imaginärteil getrennt werden. Dies ergibt bei entsprechender Normierung mit $\xi = z\beta_0$ und $r + jx = \frac{\underline{Z}}{Z_0}$ das reelle Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dr}{d\xi} = \underline{\mu}'' + \underline{\epsilon}''(x^2 - r^2) + \underline{\epsilon}' 2rx$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \underline{\mu}' + \underline{\epsilon}'(x^2 - r^2) - \underline{\epsilon}'' 2rx$$

Dabei wurde senkrechter Einfall der Wellen an der Oberfläche bzw. eine große Dielektrizitätskonstante $|\underline{\epsilon}| \gg \cos^2 \theta$ vorausgesetzt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergibt in vielen praktischen Fällen die Voraussetzung $\underline{\epsilon}'' < \underline{\epsilon}'$ eine ordentliche Näherung, so daß nur $\underline{\mu}$ durch $\underline{\mu} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\underline{\epsilon}} \right)$ ersetzt werden muss. Außerhalb von Sprungstellen der komplexen Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität erreicht man auch eine größere Näherung unter der Annahme $\underline{Z} \approx Z_0 \sqrt{\frac{\underline{\mu}'}{\underline{\epsilon}'}}$, was identisch ist mit dem Ersatz von $\underline{\epsilon}'$ durch $\underline{\epsilon}' + \cos^2 \theta$ in der Rechnung. Eine genaue Darstellung des allgemeinsten Falles auf einem Analogrechner ist angesichts der notwendigen Division durch eine komplexe Funktion nicht sinnvoll.

Man wird vernünftigerweise nicht Real- und Imaginärteil des Feldwiderstandes getrennt auf zwei Oszillographen in Abhängigkeit von der Tiefe darstellen, sondern die Aufzeichnung in der komplexen Zahlenebene wählen.

In gleicher Weise kann auch die Ortsabhängigkeit des Widerstandes entlang einer inhomogenen Leitung auf dem Analogrechner dargestellt werden. In diesem Fall müßte die Permeabilität $\mu_0 \mu$ durch den Induktivitätsbelag mit seinen Verlusten $L' + \frac{R'}{j\omega}$ und die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 \epsilon$ durch den Kapazitätsbelag $C' + \frac{G'}{j\omega}$ ersetzt werden.

Bild 2 zeigt die entsprechende Schaltung auf einem Analogrechner (speziell Telefunken-Rechner RA 436/2 mit Parabelmultiplikatoren) mit $\xi = B\tau$

$$u_1 = \frac{U}{A} r, \quad u_{10} = u_1(\tau=0), \quad a = \epsilon' ABTU, \quad c = \mu' \frac{B}{A} TU,$$

$$u_2 = \frac{U}{A} x, \quad u_{20} = u_2(\tau=0), \quad b = \epsilon'' ABTU, \quad d = \mu'' \frac{B}{A} TU.$$

Dabei ist U die Maschineneinheit und T die Integrationskonstante des Rechners.

Bei praktischen Berechnungen wird man so dimensionieren, daß u_1 und u_2 immer kleiner als eine Maschineneinheit und aus Gründen der Rechengenauigkeit möglichst groß bleiben. Dies wird erreicht mit $A = \left| \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right|_{\max}$. Setzt man beispielsweise einen in erster Linie leitfähigen Halbraum voraus, d.h. $\epsilon'' > \epsilon'$ ($b > a$) und $\mu'' < \mu'$ ($d < c$), dann ergibt eine Dimensionierung mit $B = \frac{1}{\epsilon''_{\max} TA}$

eine günstige Darstellung, bei der b und c und damit auch a und d kleiner als eine Maschineneinheit bleiben.

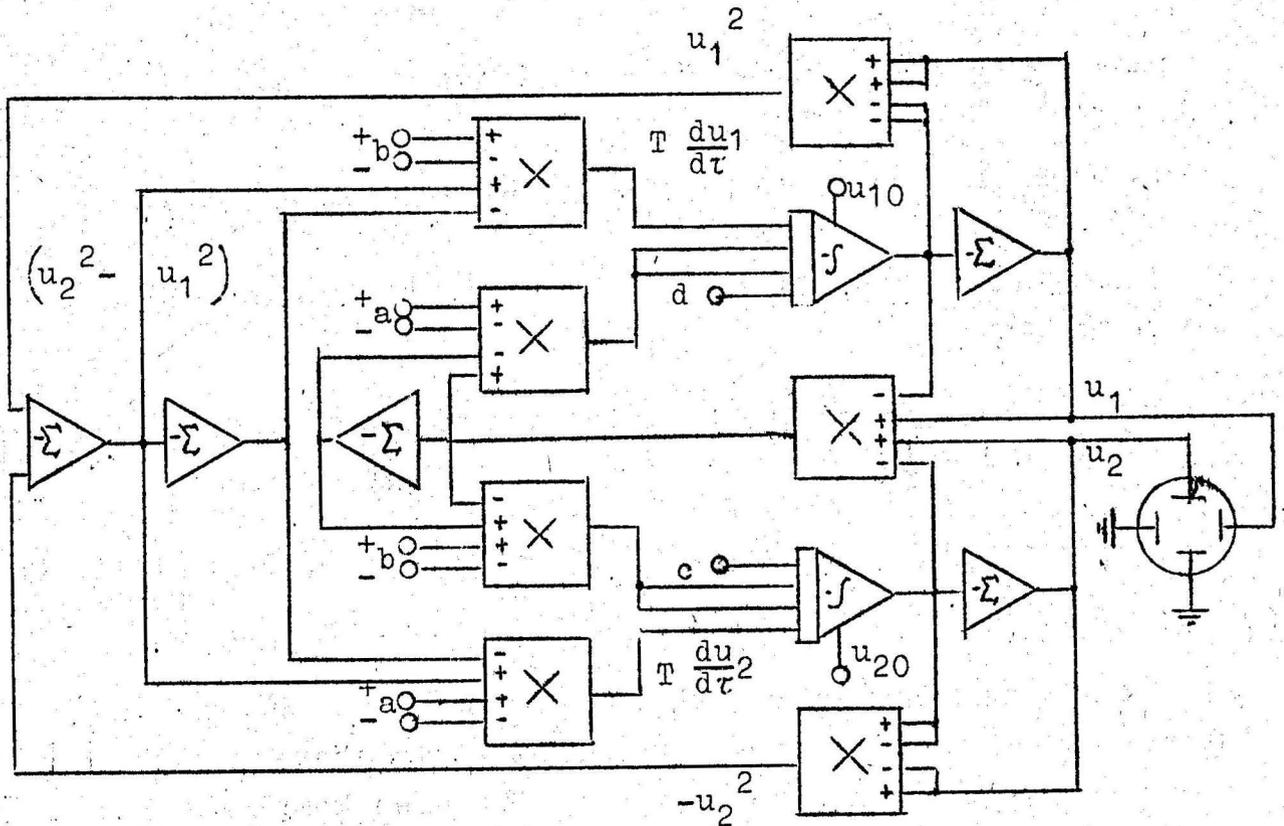


Bild 2 : Schaltung zur Darstellung des Feldwiderstandes auf einem Analogrechner.

3. Darstellung des Oberflächenwiderstandes

In vielen praktischen Fällen interessiert nicht so sehr der Feldwiderstand in seiner Tiefenabhängigkeit, sondern vielmehr seine Frequenzabhängigkeit in einer bestimmten Tiefe, d.h. die sogenannte Ortskurve.

Speziell der Oberflächenwiderstand $\underline{Z}_e = \underline{Z}$ ($z=0$) spielt eine große Rolle, wenn die Reflexion und Absorption von Wellen an der Oberfläche eines in Normalenrichtung inhomogenen Halbraumes von Interesse sind.

Aus ihm ergibt sich der Reflexionsfaktor an der Oberfläche zu :

$$\underline{r}_v = \frac{Z_0 \sin \theta - \underline{Z}_e}{Z_0 \sin \theta + \underline{Z}_e} \quad \text{für vertikal polarisierte und}$$

$$\underline{r}_h = \frac{\underline{Z}_e \sin \theta - Z_0}{\underline{Z}_e \sin \theta + Z_0} \quad \text{für horizontal polarisierte Wellen.}$$

In einem homogenen Halbraum ist in jeder Tiefe der Feldwiderstand gleich:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon}\right)} \quad \left(\text{für Horizontalpolarisation: } Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{1}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon}}\right)}\right).$$

Für senkrechten Einfall ($\theta = 90^\circ$) ist dieser charakteristische Widerstand identisch mit dem Feldwellenwiderstand $Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Dies kann umgekehrt dazu benutzt werden, um den Oberflächenwiderstand eines inhomogenen Halbraumes als charakteristischen Widerstand eines homogenen mit der wirksamen komplexen Dielektrizitätskonstante $\underline{\epsilon}_e$ und der wirksamen Permeabilität $\underline{\mu}_e$ anzusehen. Dabei zeigt es sich jedoch, daß sich als wirksame Werte nicht nur Mittelwerte der in der Tiefe vorkommenden Größen ergeben. Die Realteile der wirksamen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität können durchaus auch negative Werte annehmen ($\epsilon'_e < 0$ oder $\mu'_e < 0$).

Den Oberflächenwiderstand erhält man folgendermaßen aus der Darstellung des Feldwiderstandes im Analogrechner. In einer Tiefe $-z_0$ sei der Feldwiderstand bekannt, z.B. befinde sich dort eine homogene Schicht sehr großer Dicke ($\underline{Z}(-z_0) = \underline{Z}_{1v}$). Dann ergibt sich der Oberflächenwiderstand durch Integration über \underline{Z} von der Tiefe $z = -z_0 \dots 0$ bzw. der Zeit $\tau = 0 \dots \tau_{ges}$ am Analogrechner.

Wird in sehr großer Tiefe mit der Integration begonnen, so ist der Oberflächenwiderstand unabhängig vom wirksamen Feldwiderstand in dieser Tiefe, so daß dort keine dicke homogene Schicht vorausgesetzt werden muss. Die notwendige Tiefe $-z_0$ in der der Anfangswiderstand beliebig gewählt werden kann ohne Einfluß auf den Oberflächenwiderstand (beispielsweise $\underline{Z}(-z_0) = 0$), hängt ganz

von der Tiefenabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität im Halbraum ab. Im allgemeinen ist sie größer als die Eindringtiefe, d.h. die Tiefe, wo die Horizontalfeldstärke auf den e-ten Teil der an der Erdoberfläche vorgegebenen abgesunken ist.

Mit Hilfe dieses Verfahrens kann nur jeweils bei einer Integration der Oberflächenwiderstand für eine Frequenz bestimmt werden. Eine direkte Darstellung der Frequenzabhängigkeit ist nicht möglich, da der Rechner nur die Integration über eine Variable gestattet.

4. Schichtung

Bei vielen technischen Problemen ist nicht ein in Normalenrichtung beliebig inhomogener Halbraum vorgegeben, es interessiert vielmehr eine Anzahl von Schichten in ihrem Zusammenwirken auf die Wellenausbreitung. Außerdem wird man bei grundlegenden Untersuchungen aus Gründen der Übersichtlichkeit beliebige Inhomogenität möglichst durch diskrete Schichten ersetzen. Deshalb sollen im folgenden nur geschichtete Beispiele näher betrachtet werden.

Der einfachste Fall ist ein zweigeschichtetes Medium; d.h. ein homogener Halbraum (Unterschicht) sei von einer nicht zu dicken ebenfalls homogenen Schicht (Oberschicht) bedeckt. Dann liegt der Oberflächenwiderstand in der komplexen Ebene auf einer Spirale, die ausgehend vom charakteristischen Widerstand der Unterschicht \underline{Z}_2 den charakteristischen Widerstand der Oberschicht \underline{Z}_1 im Uhrzeigersinn umkreist.

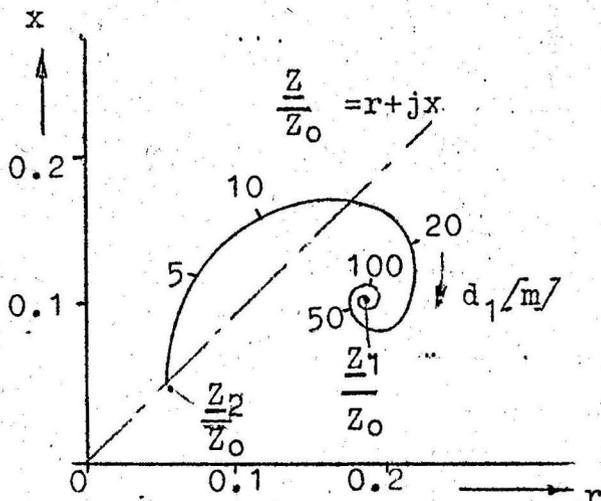


Bild 3.

Normierter Oberflächenwiderstand eines Zweischichtenmediums in Abhängigkeit von der Dicke der Oberschicht d_1

$$(\kappa_1 = 1 \frac{\text{mS}}{\text{m}}, \kappa_2 = 10 \frac{\text{mS}}{\text{m}},$$

$$\varepsilon'_1 = 10, \varepsilon'_2 = 20,$$

$$f = 0,9 \text{ MHz}).$$

Der Oberflächenwiderstand eines solchen Zweischichtenmediums errechnet sich zu :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1 \tanh \gamma_1 d_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \tanh \gamma_1 d_1} = \underline{Z}_1 \frac{1 - \underline{r}_{12} \exp(-2 \gamma_1 d_1)}{1 + \underline{r}_{12} \exp(-2 \gamma_1 d_1)}$$

Dabei ist $\gamma_1 = j\beta_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 (1 - \frac{\cos^2 \theta}{\mu_1})}$ (bzw. $j\beta_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 (1 - \frac{\cos^2 \theta}{\mu_1})}$)

die Fortpflanzungskonstante in Normalenrichtung in der Ober- schicht und $\underline{r}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ der Reflektionsfaktor an der Schicht- grenze.

Bei mehrfacher Schichtung wäre entsprechend für \underline{Z}_2 der Ober- flächenwiderstand des unter der ersten Schicht liegenden geschich- teten Halbraumes zu setzen.

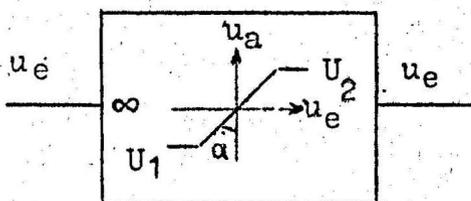
Bei einer Variation der Frequenz ändert sich nicht nur die Weg- länge auf der Spirale, sondern es wandern auch die Anfangs- und Endpunkte \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 . Daraus resultiert eine sehr komplizierte Frequenzabhängigkeit des Oberflächenwiderstandes, bzw. der wirk- samen relativen komplexen Dielektrizitätskonstante und Permeabi- lität.

Bei der Darstellung des Feldwiderstandes eines solchen geschich- teten Mediums auf einem Analogrechner müssen Real- und Imaginär- teil der relativen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität als Sprungfunktionen vorgegeben werden:

$$\epsilon' = \epsilon'_1, \epsilon'' = \epsilon''_1, \mu' = \mu'_1 \text{ und } \mu'' = \mu''_1 \text{ für } z=0 \dots -z_1;$$

$$\epsilon' = \epsilon'_2, \epsilon'' = \epsilon''_2, \mu' = \mu'_2 \text{ und } \mu'' = \mu''_2 \text{ für } z=-z_1 \dots -z_2 \text{ usw.}$$

Solche Sprungfunktionen werden am günstigsten mit speziellen Funktionsgebern erzeugt, wie Bild 4 zeigt:



$$u_a = \begin{cases} U_2 & \text{für } u_e < U_0 \\ U_1 & \text{für } u_e > U_0 \end{cases}$$

$$\tan \alpha \rightarrow \infty$$

Bild 4. Erzeugung einer Sprungfunktion auf einem Analogrechner.

Bild 5 zeigt Aufnahmen des Feldwiderstandsverlaufs in Abhängigkeit von der Tiefe für verschiedene Frequenzen bei einem Zweischichtenmodell, dargestellt auf einem Analogrechner mit der unter 3. angegebenen Bemessung. Der rechte Endpunkt ist jeweils der Oberflächenwiderstand ($z=0$).

Bild 6 bis 9 zeigen Oberflächenwiderstände in ihrer Frequenzabhängigkeit. Diese Beispiele wurden für Untersuchungen des Einflusses der Erdoberfläche auf die Wellenausbreitung im Lang-, Mittel- und Kurzwellenbereich /2/ an einem Analogrechner durchgerechnet. Dabei ist $\mu = 1$ gewählt, da meistens nur dieser Sonderfall interessiert. Für $\mu'' \ll \mu' \neq 1$ gelten die gleichen Kurven, wenn f durch $\frac{f}{\mu'}$, und ϵ durch $\epsilon \mu'$ ersetzt werden. In diesen Beispielen spielt der Einfallswinkel θ keine Rolle, da jeweils $|\epsilon| \gg 1$ ist. Die Kurven wurden abgebrochen, wo der Imaginärteil des Oberflächenwiderstandes sehr klein wurde, da dort die Genauigkeit im logarithmischen Maßstab ungenügend ist und die Kurven ihren Sinn für allgemeinere Betrachtungen verlieren.

Für sehr dünne Schichten ist der Oberflächenwiderstand :

$$\underline{Z}_e \approx \underline{Z}_2 \left[1 + \left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \right) \epsilon_1 d_1 \right]$$

Für senkrechten Einfall ergibt sich daraus :

für $Z_1 > Z_2$
$$\underline{Z}_e \approx \underline{Z}_2 + j\beta_0 Z_0 \mu_1 d_1$$
 ,

für $Z_2 > Z_1$
$$\underline{Z}_e \approx \underline{Z}_2 - j\beta_0 Z_0 \frac{\mu_2}{\epsilon_2} \epsilon_1 d_1$$
 .

Oberschichten mit gleichem Produkt aus Permeabilität und Dicke ergeben folglich bei geringerer Dielektrizitätskonstante oder höherer Permeabilität als in der Unterschicht und im umgekehrten Fall Oberschichten mit gleichem Produkt aus Dielektrizitätskonstante und Dicke den gleichen Oberflächenwiderstand. Solche dünnen Deckschichten haben überhaupt nur einen Einfluß auf den Oberflächenwiderstand, wenn ihre Dicke größer als

$$d_1 > \frac{0,1\lambda_0}{2\pi} \left| \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{1}{\mu_1} \right| \quad \text{bzw.} \quad d_1 > \frac{0,1\lambda_0}{2\pi} \left| \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{\epsilon_1} \right| \quad \text{ist.}$$

Für dicke Oberschichten ergibt sich der Oberflächenwiderstand zu :

$$\underline{Z}_e \approx \underline{Z}_1 \left[1 - \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \exp.(-2 \gamma_1 d_1) \right] .$$

Der Einfluss der Unterschicht ist folglich kleiner als 10% , wenn die Dicke der Oberschicht größer als

$$d_1 > \frac{\lambda_0}{4\pi \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \ln 2 \left| \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right| ,$$

d.h. je nach dem Verhältnis der Wellenwiderstände mindestens 1-1,5 fach so groß wie die üblicherweise definierte Eindringtiefe ist.

Daraus kann entnommen werden, daß alles ohne Einfluß auf den Oberflächenwiderstand ist, was unterhalb der von der Oberfläche aus gesehenen ersten Schicht liegt, deren Dicke größer als ihre Eindringtiefe ist. In einem beliebig inhomogenen Halbraum, in dem keine solche Schicht vorhanden ist, ist die Definition einer mittleren Eindringtiefe aus den an der Oberfläche wirksamen Werten $\delta_e = \frac{\lambda_0}{2\pi \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_e \mu_e}}$ nicht sinnvoll, da noch Bereiche, die wesentlich tiefer unter der Oberfläche liegen, einen Einfluß auf den Oberflächenwiderstand haben.

5. Direkte Darstellung der Frequenzabhängigkeit des Oberflächenwiderstandes.

In manchen Fällen ist es möglich, den Oberflächenwiderstand näherungsweise direkt in Abhängigkeit von der Frequenz mit Hilfe eines Analogrechners auf dem Schirm eines Oszillographen sichtbar zu machen. Beispielsweise sei der Halbraum von einem leitfähigen Medium ($\epsilon'' = \frac{\chi(z)}{\omega \epsilon_0}$) mit konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ' ($< \epsilon''$) und Permeabilität μ' ($> \mu''$) erfüllt und es werde der Oberflächenwiderstand bei nicht zu hohen Frequenzen betrachtet. Wählt man $A = \text{konstant}$ und die Rechenzeit für einen Integrationsprozeß $\tau_{ges} = \text{konstant}$, so wird $b = \text{konstant}$ und damit $a \sim f$ und $c \sim f$.

Wird nun als tatsächliche Rechenzeit $n \tau_{ges}$ genommen, die Funktion $\epsilon''(z)$ innerhalb der Rechenzeit n mal von $z = -z_0$ bis $z = 0$

durchlaufen, und werden a und c quadratisch verändert, so durchläuft der Feldwiderstand nacheinander n -mal den gesamten Tiefenbereich, während sich die Frequenz von jedem Durchlauf zum nächsten verdoppelt.

Das n -malige Durchlaufen der Tiefenabhängigkeit der Leitfähigkeit wird beispielsweise bei Zweischichtenmodellen am günstigsten mit Hilfe einer im Rechner erzeugten Sinusspannung erreicht, deren Periodendauer gleich dem n -ten Teil der Rechenzeit ist, und die nach großer Verstärkung begrenzt wird. Durch Phasenverschiebung der Sinusspannung in bekannter Weise und durch Addition einer konstanten Spannung vor und hinter der Verstärkung kann damit jede einfache Sprungfunktion $\varepsilon''(z)$ innerhalb der Rechenzeit n -mal mit ausreichender Genauigkeit erzeugt werden.

Durch eine geeignete Hell-Dunkelsteuerung, bzw. durch Addition einer ausreichend großen Rechteckspannung zu einer der beiden auf dem Oszillographen aufgezeichneten Koordinaten, kann erreicht werden, daß der Feldwiderstand nur jeweils am Ende jeder Einzelintegration, wo er in den Oberflächenwiderstand übergeht, auf dem Schirm sichtbar ist.

Die Genauigkeit bei dieser Darstellung des Frequenzverlaufs des Oberflächenwiderstandes ist jedoch nicht sehr groß, da während jeder einzelnen Integration jeweils die Frequenz nicht konstant bleibt.

Bild 9 zeigt den auf diese Weise photographierten Ortskurvenverlauf des Oberflächenwiderstandes eines zwei-geschichteten Halbraumes.

6. Anwendung für Berechnungen der jahreszeitlichen Feldstärke-schwankungen im Fernfeld von Mittelwellensendern.

Die Feldstärke im Fernfeld eines Rundfunksenders ist in erster Näherung:

$$\underline{E} = E_0 \frac{\exp(-j\beta_0 R)}{R^2} \left(\frac{Z_0}{Z_e} \right)^2 ,$$

wenn man voraussetzt, dass der Erdboden zwischen Sender und Empfänger in horizontaler Richtung homogen ist. Mit dem Fern-

Feld kann außerhalb einer Entfernung von $R > 5\lambda_0 \left| \frac{Z_0}{Z_e} \right|^2$ gerechnet werden. ($E_0 = -\frac{Z_0 I_{\text{eff}}}{2\pi}$ ist eine nur vom Sender abhängige Größe).

Beispielsweise beträgt die Leitfähigkeit eines normalen tonigen Sandbodens im Frühjahr und Herbst ca. $10 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ bei einer relativen Dielektrizitätskonstante von ca. 20. Im Sommer kann Trockenheit ein Absinken der Leitfähigkeit auf ca. $1 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ bei einer relativen Dielektrizitätskonstante von ca. 10 für den Erdboden bis zu einer Tiefe von ca. 1 m hervorrufen. (Der gleiche Zustand kann bei sehr starkem Frost im Winter u.U. auch eintreten).

Aus diesem Beispiel ergibt sich ein normierter Oberflächenwiderstand im Frühjahr und Herbst von $0,108 \exp(j 40,5^\circ)$ bei 2 MHz und $0,05 \exp(j 45^\circ)$ bei 500 kHz und im Sommer von $0,128 \exp(j 51,5^\circ)$ bei 2 MHz und $0,061 \exp(j 52^\circ)$ bei 500 kHz.

Die Feldstärke ändert sich folglich im Laufe des Jahres in ihrem Betrag bei 2 MHz wie 1,4:1 und bei 500 kHz wie 1,5:1 und zeigt Phasenänderungen von 22° bzw. 14° .

Ebenso können in Gebieten mit sehr hoch liegendem Grundwasserspiegel dessen Änderungen Feldstärkevariationen hervorrufen. Beispielsweise in trockenem Sandboden mit einer Leitfähigkeit von ca. $1 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ und einer relativen Dielektrizitätskonstante von ca. 10 wandere der Grundwasserspiegel von 2 m im Winter auf 4 m im Sommer. Im Bereich des Grundwassers betrage die Leitfähigkeit ca. $10 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ bei einer relativen Dielektrizitätskonstante von ca. 20.

Dann ändert sich der normierte Oberflächenwiderstand von $0,156 \exp(j 50^\circ)$ bei 2 MHz und $0,07 \exp(j 56^\circ)$ bei 500 kHz auf $0,21 \exp(j 45^\circ)$ bei 2 MHz und $0,082 \exp(j 59^\circ)$ bei 500 kHz und damit der Betrag der Feldstärke bei 2 MHz wie 1,8:1 und bei 500 kHz wie 1,4:1 und die Phase um -10° bzw. um 6° .

Änderungen dieser Art wurden verschiedentlich beobachtet /4/, /5/, /6/. In der Praxis sind die Verhältnisse allerdings wesentlich komplizierter, da im allgemeinen der Erdboden entlang der Ausbreitungsstrecke zwischen Sender und Empfänger nicht als homogen betrachtet werden darf.

Literatur

- /1/ Wait J.R. Electromagnetic waves in stratified media
(Pergamon Press 1962)
- /2/ Hanle E. Der komplexe Widerstand der Erdoberfläche
bei Hochfrequenz und seine Messung.
(NTZ 1964 in Vorbereitung)
- /3/ Schelkunoff S.A. Electromagnetic waves.(v.Nostrand 1951)
- /4/ Müller K. Zur Frage der Abhängigkeit von Boden-
leitfähigkeit und Feldstärke im MW-
Bereich.
(Techn.Mittlg.RFZ Berlin 6 (1962)
S.11-17)
- /5/ Temporal variation of ground-wave Field
strengths (CCIR,VIII th.Plen.Ass.War-
schau 1956 Study Pr.52,Doc.24-E)
- /6/ Feyer W. Nachweis von jahreszeitlichen und boden-
temperaturabhängigen Laufzeitänderungen
von Wellen im 100 kHz Band durch Auswer-
tung langjähriger Beobachtungen an der
Deutschen Decca-Kette,
(Vorträge d.Tagung d.Arbeitsgem.Ionosphäre
d.URSI-Landesausschusses u.d.Fachgr.
Wellenausbreitung d.NTG, Kleinheubach
1960 u.NTZ 14 (1961) S.183-196).

Bild 5 a-f

Oszillographenbilder des Feldwiderstandsverlaufs in Abhängigkeit von der Tiefe bei einem Zweischichtenmodell für verschiedene Frequenzen

$$\kappa_1 = 1 \frac{\text{mS}}{\text{m}}, \quad \kappa_2 = 10 \frac{\text{mS}}{\text{m}}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 8, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad d_1 = 1,5 \text{ m}.$$

(als Anfangswiderstand wurde dabei $Z(-z_0) = 0$ gewählt)

Bild 6 - 9

Real- und Imaginärteil des normierten Oberflächenwiderstandes

$$r_e + jx_e = \frac{Z_e}{Z_0}$$

in Abhängigkeit von der Frequenz bei verschiedenen Zweischichtenmodellen

—————	$d_1 = 1\text{m}$
— — — — —	$d_1 = 4\text{m}$
— — — — —	$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 0$
— — — — —	$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 8$
o o o o o	$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 64$
---	normierter Feldwiderstand der Ober- bzw. Unterschicht ($\epsilon' = 0$)

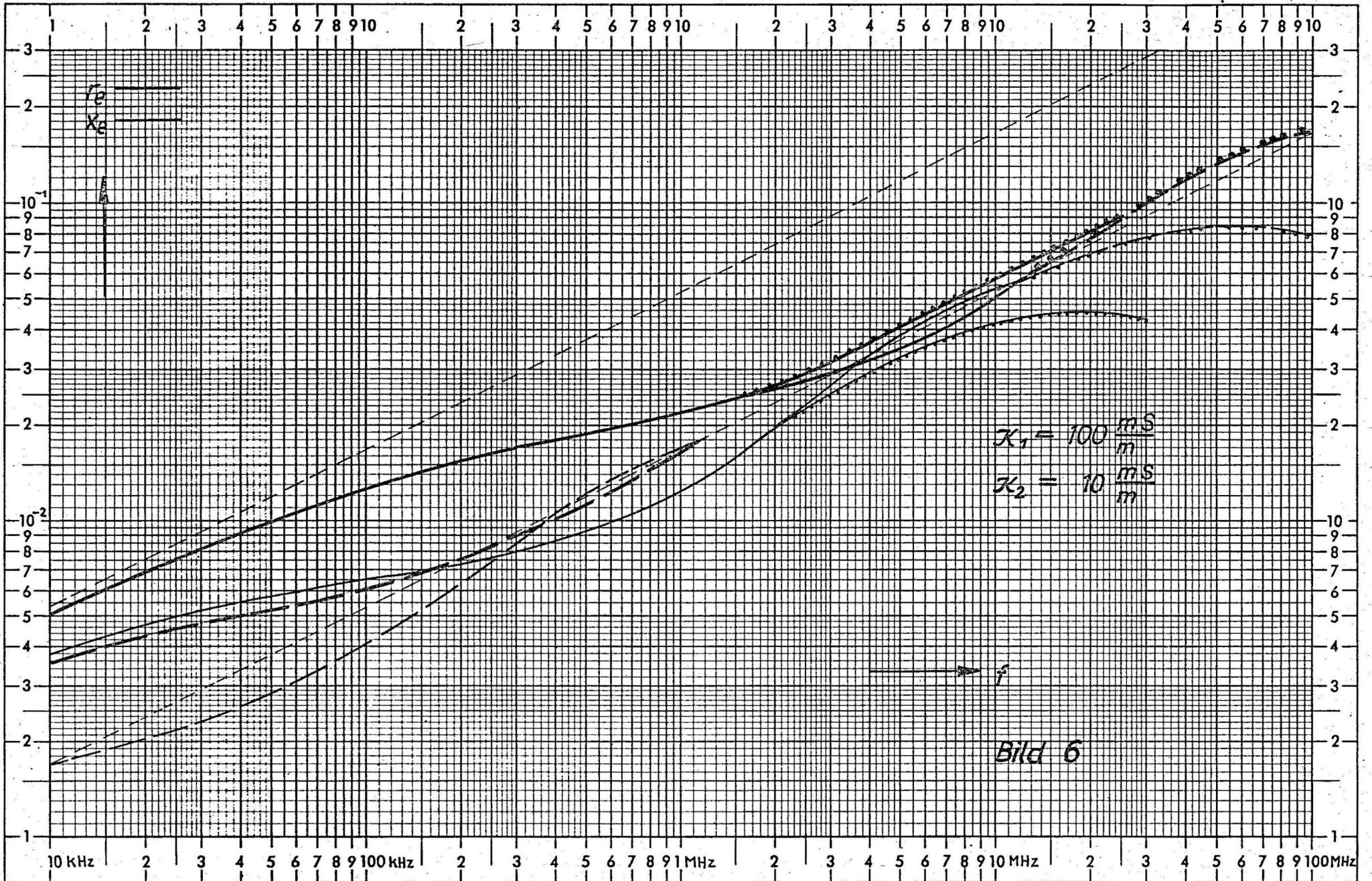
Bild 10

Oszillographenbild des Oberflächenwiderstandsverlaufs in Abhängigkeit von der Frequenz bei einem Zweischichtenmodell

$$\kappa_1 = 1 \frac{\text{mS}}{\text{m}}, \quad \kappa_2 = 10 \frac{\text{mS}}{\text{m}}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 8, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad d_1 = 1\text{m}.$$

Maßstab: 1 Teilstrich = 0,032 Z_0

(das rechte Ende der Striche ergibt den Oberflächenwiderstand bei $f = 0,1875; 0,375; 0,75; 1,5; 3; 6; 12; 24 \text{ MHz}$)



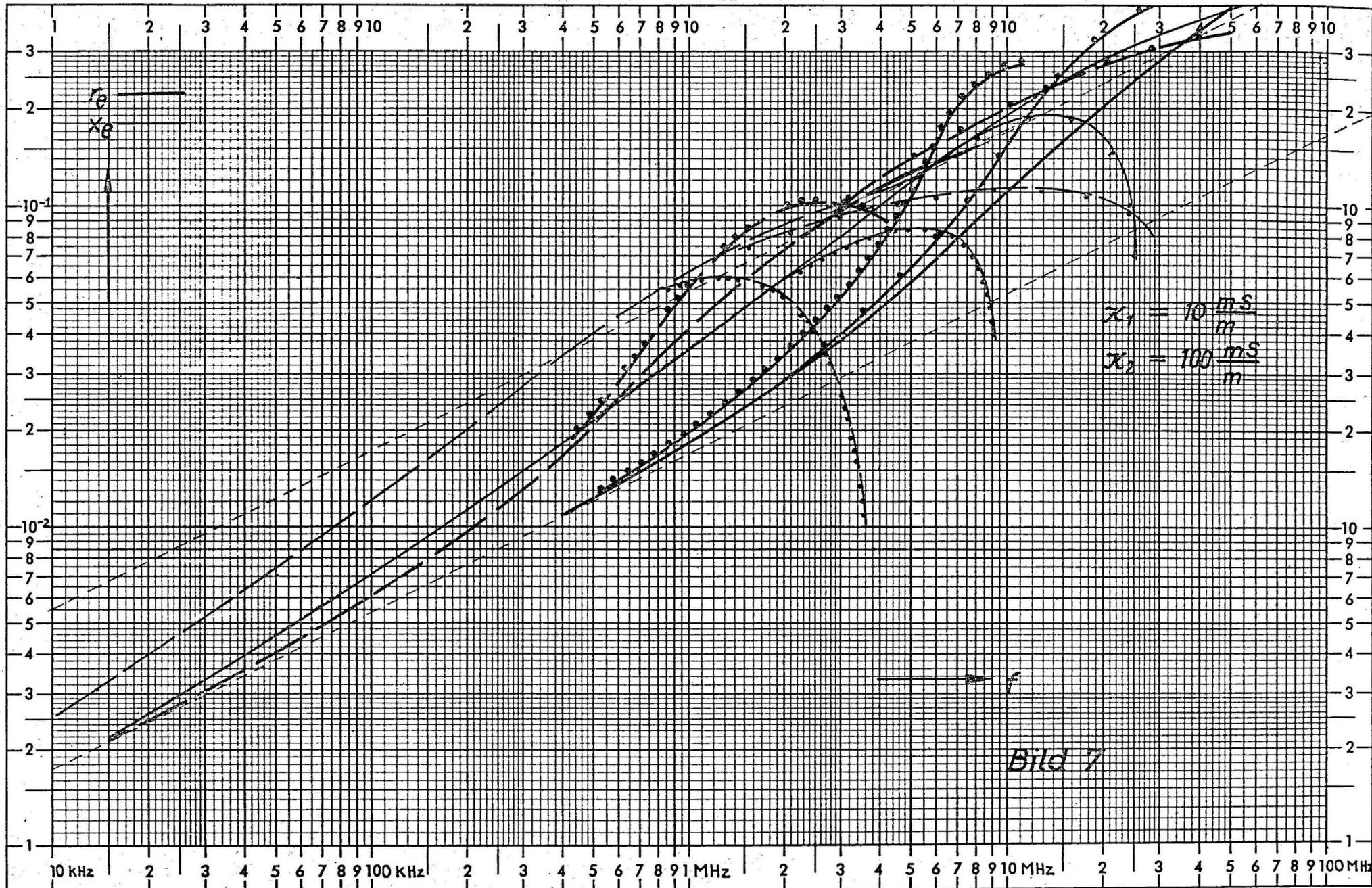


Bild 7

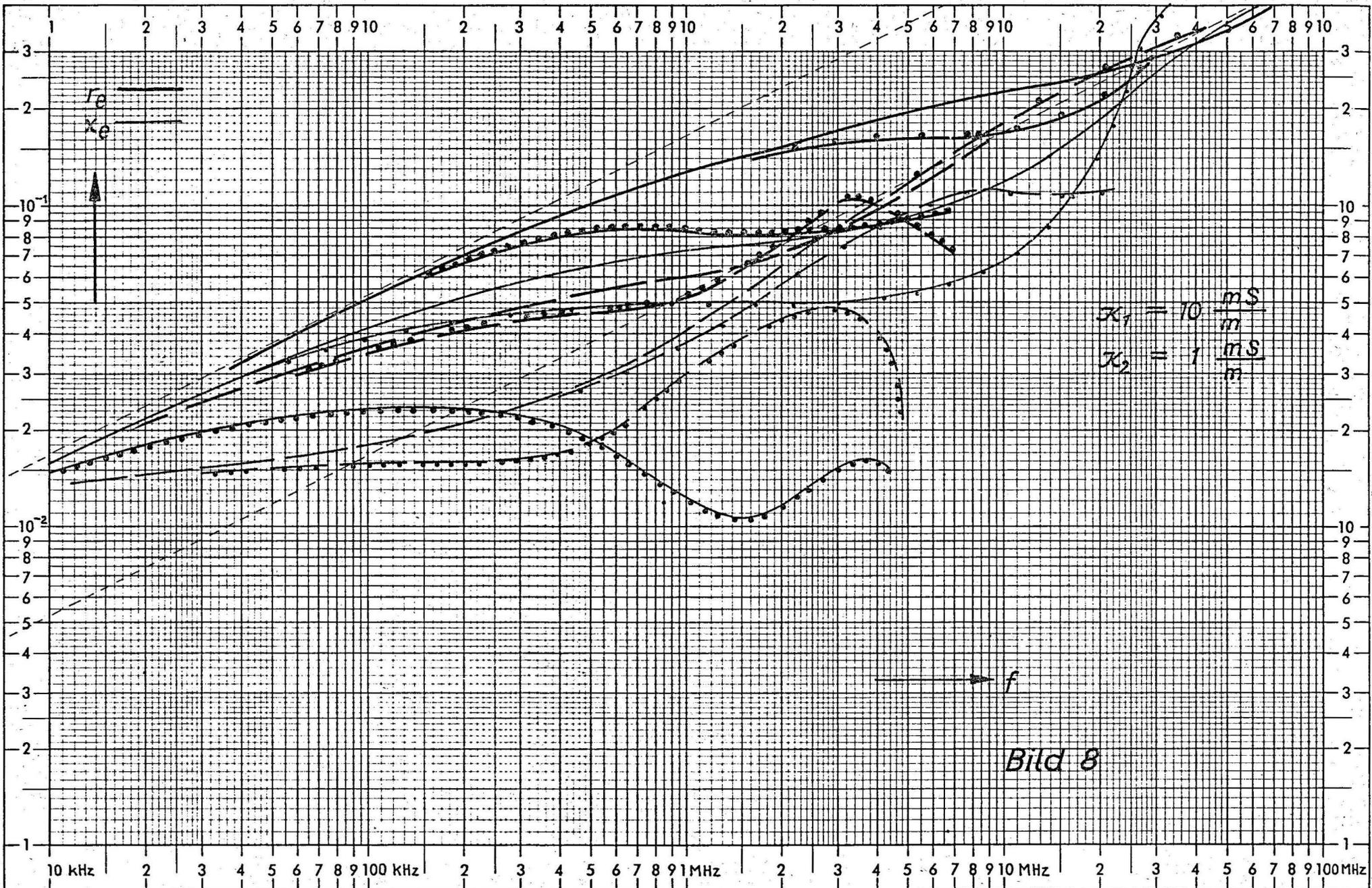
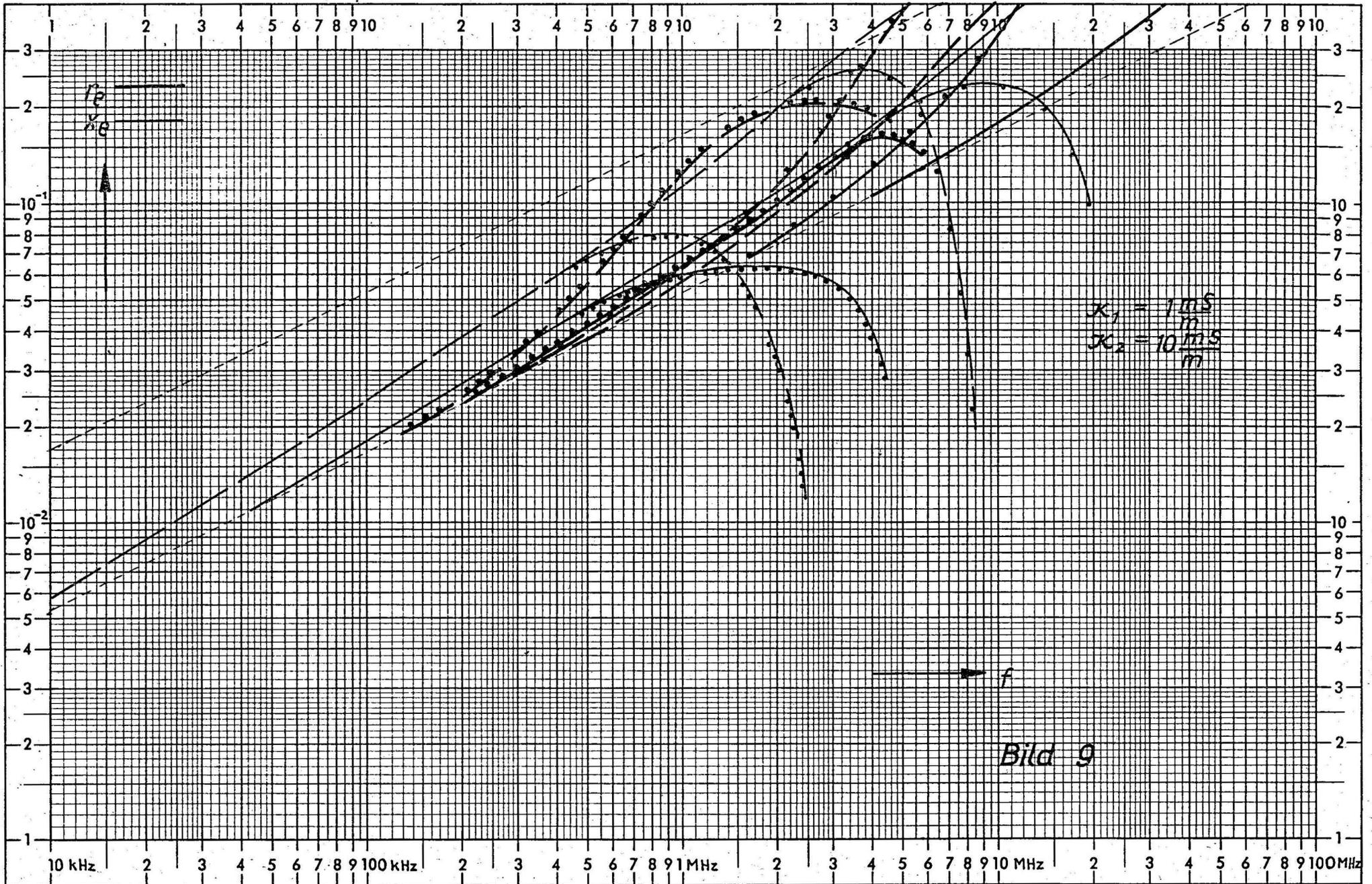
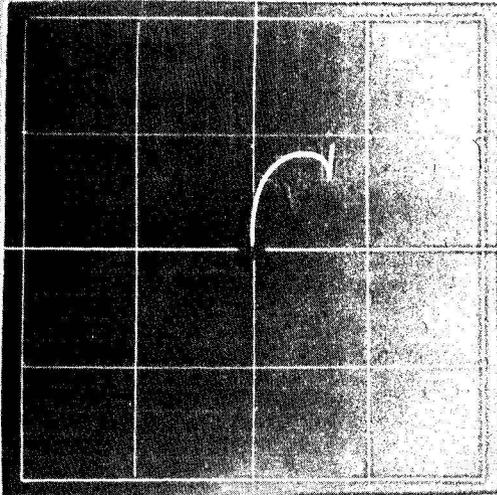


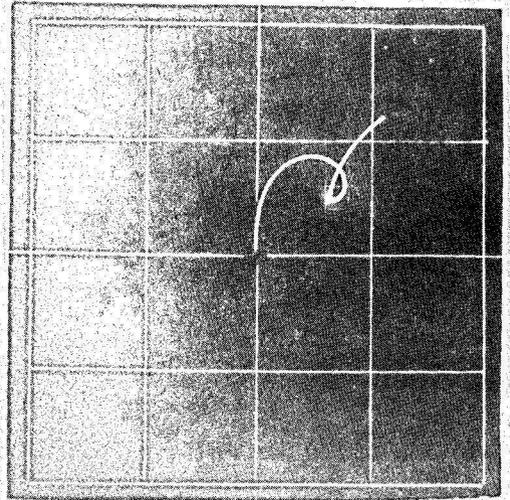
Bild 8



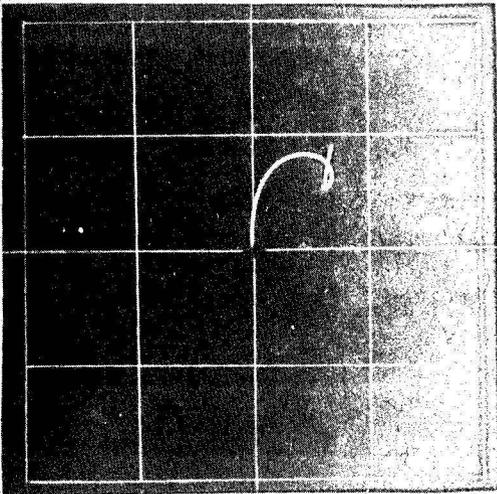
- 10 -



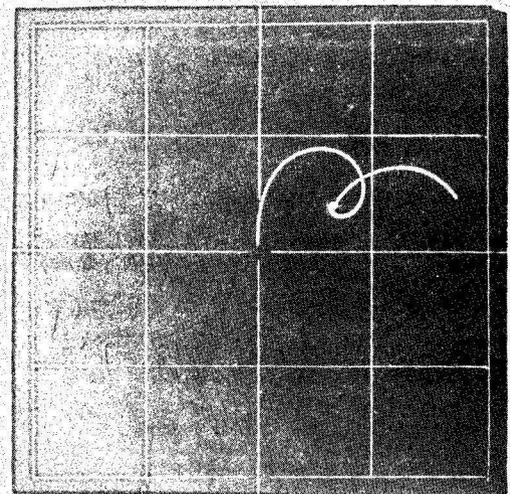
a) $f = 0,75 \text{ MHz}$



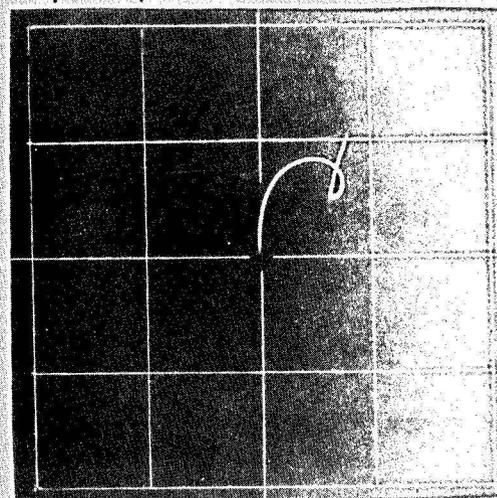
d) $f = 6 \text{ MHz}$



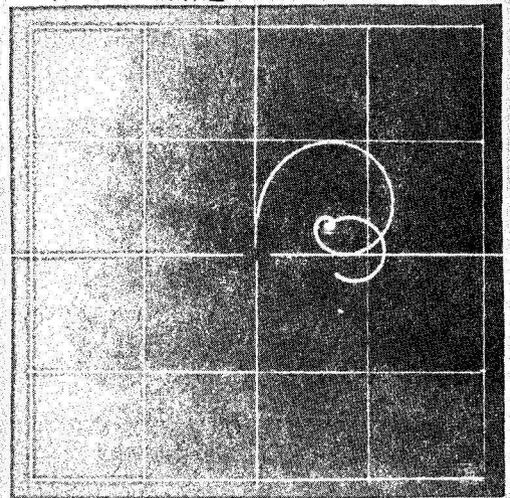
b) $f = 1,5 \text{ MHz}$



e) $f = 12 \text{ MHz}$



c) $f = 3 \text{ MHz}$



f) $f = 24 \text{ MHz}$

Bild 5

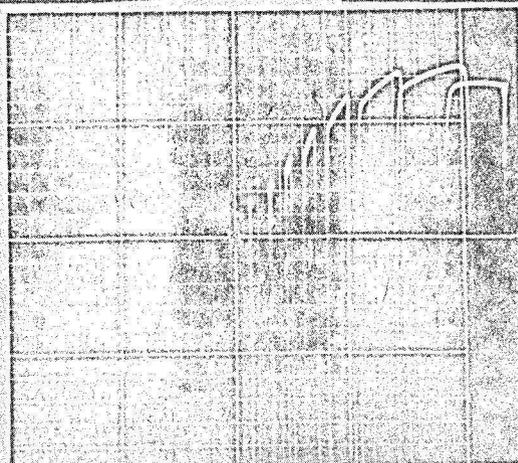


Bild 10

